第4講　ド・モアブルの定理

4

［A］ α を 0 でない複素数とする．$\beta^2=\alpha$ となるような複素数 β がちょうど 2 個存在することを示せ.

［B］ 複素数 α は $|\alpha|=1$ を満たしている．このとき，$|\alpha^m+\alpha^{-m}|>1$ となる自然数 m が存在することを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　ド・モアブルの定理

④ $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき，方程式 $z^5+\frac{1}{z^5}=2\cos 3\theta$ $(0<\theta<\pi)$ を満たす θ の個数は，合計 $\boxed{}$ 個である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　ド・モアブルの定理

4

［A］　α を 0 でない複素数とする．$\beta^2=\alpha$ となるような複素数 β がちょうど 2 個存在することを示せ．

［B］　複素数 α は $|\alpha|=1$ を満たしている．このとき，$|\alpha^m+\alpha^{-m}|>1$ となる自然数 m が存在することを示せ．

【答】　略

【解説】

［A］　$\alpha\neq 0$ より $r>0$，$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ を満たす r と θ を用いて

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表すことができる．ここで

$$\beta=a(\cos\phi+i\sin\phi)\ (a>0,\ 0^\circ\leqq\phi<360^\circ)$$

とおくと，

$$\beta^2=a^2(\cos 2\phi+i\sin 2\phi)$$

となるが，

$$\begin{cases} a=\sqrt{r} \\ \phi=\dfrac{1}{2}\theta,\ \dfrac{1}{2}\theta+180^\circ \end{cases}$$

ととれば $\beta^2=\alpha$ とできる．つまり

$$\beta=\pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

よって　$\beta^2=\alpha$ となる β はちょうど 2 個存在する．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ $|\alpha|=1$ より $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ とおける．このとき

$$\alpha^m=\cos m\theta+i\sin m\theta$$
$$\alpha^{-m}=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)=\cos m\theta-i\sin m\theta$$

より

$$|\alpha^m+\alpha^{-m}|=|2\cos m\theta|=2|\cos m\theta|$$

となる．ここですべての自然数 m に関して $|\alpha^m+\alpha^{-m}|\leqq 1$ と仮定する．

ここで，ある自然数 k について $|\alpha^k+\alpha^{-k}|<1 \iff |\cos k\theta|<\dfrac{1}{2}$

とすると，

$$\cos 2k\theta=2\cos^2 k\theta-1=2|\cos k\theta|^2-1<-\frac{1}{2}$$

となり $|\alpha^m+\alpha^{-m}|=2|\cos m\theta|\leqq 1$ に矛盾．

また，ある自然数 k について $|\alpha^k+\alpha^{-k}|=1 \iff |\cos k\theta|=\dfrac{1}{2}$

が成り立つとすると

$$|\cos 3k\theta|=|4\cos^3 k\theta-3\cos k\theta|=\left|4\left(\pm\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right| \quad (\text{複号同順}) =1$$

つまり $|\alpha^{3k}+\alpha^{-3k}|=2$ となるので，$|\alpha^m+\alpha^{-m}|\leqq 1$ に矛盾．

以上より　$|\alpha^m+\alpha^{-m}|>1$ を満たす自然数 m は存在する．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　ド・モアブルの定理

4　$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき，方程式 $z^5+\frac{1}{z^5}=2\cos 3\theta$ $(0<\theta<\pi)$ を満たす θ の個数は，合計 [　　] 個である．

【答】 3

【解説】

$z=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ より

$$\frac{1}{z}=\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$$

よって

$$\begin{aligned}&z^5+\frac{1}{z^5}\\&=\left(\cos\frac{10}{3}\pi+i\sin\frac{10}{3}\pi\right)+\left\{\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right)\right\}\\&=2\cos\frac{10}{3}\pi\\&=-1\end{aligned}$$

ゆえに $\cos 3\theta=-\frac{1}{2}$ を満たす θ の個数は $0<3\theta<3\pi$ より

$$3\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{2}{9}\pi,\ \frac{4}{9}\pi,\ \frac{8}{9}\pi$$

の 3 個.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。